Rédigé par : **Jimmy PAQUEREAU**
Professeur particulier, *Completude*

Test classé sans suite

Suite homographique

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ c \neq 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qu'on appelle une suite homographique, qu'on définit comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \,/\left\{-\frac{d}{c}\right\}, \qquad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ n > 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

N.B. : cela veut bien dire qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$

1) Montrer que, si (u_n) converge, alors elle converge vers la solution ou l'une des solutions de l'équation suivante :

$$(E) :\ cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

……

……

……

……

……

2) Donner les solutions α et β de (E) lorsque son discriminant Δ est strictement positif. Donner la solution γ de (E) lorsque son discriminant est nul.

……

……

……

3) On rappelle (ou on apprend) que la réciproque u^{-1} d'une fonction u définie de I dans J peut se définir comme suit :

On note : $\forall x \in I,\ y = u(x) \in J$
u^{-1} est définie de J dans I et on a : $\forall x \in J,\ x = u^{-1}(y) \in I$

Déterminer la réciproque f^{-1} de f.

……

……

……

……

4) On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

N.B. : u_n supposé différent de β.

Montrer que v_n est géométrique de raison $= \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$.
Conseil : commencer par calculer $f(x) - f(y)$

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

5) En déduire une expression de v_n en fonction de v_0.

……

……

……

……

6) Montrer que $u_n(v_n - 1) = \beta v_n - \alpha$ et en déduire une expression de u_n en fonction de v_n.

……

……

……

……

7) On est bien dans le cas où α et β sont solutions de (E). Etudier la convergence de u_n en fonction de q.

……

……

……

……

8) On introduit maintenant la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - \gamma}$$

Montrer que w_n est arithmétique d'une raison r qu'on tâche de déterminer.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

9) Exprimer u_n en fonction de w_n. En déduire la convergence de u_n dans le cas où γ est solution de (E).

……

……

……

……